

16. Singular Homology Theory

① 定義 Δ (圏論的) 構成

Def

$$\circ [n] := \{0 < 1 < \dots < n\}$$

: 順序集合

$$\circ \Delta := \left\{ \begin{array}{l} \text{対象} : [n] \text{ たち } (n \geq 0) \\ \text{射} : \text{非減少写像} \end{array} \right.$$

: simplex
単体の圏

← これを圏 Δ と呼ぶ
← これは $\{[n]\} \subseteq \text{Cat}$
を部分圏

$\mathcal{C}$: 圏

$$\circ s\mathcal{C} := \text{Fun}(\Delta^{\text{op}}, \mathcal{C})$$

: simplicial object
: 単体的対象の圏

$$\circ s\text{Set} := \text{Fun}(\Delta^{\text{op}}, \text{Set}) = \hat{\Delta}$$

: simplicial set
: 単体的集合の圏

$$\supseteq \Delta^n := \delta[n] = \text{Hom}_{\Delta}(-, [n])$$

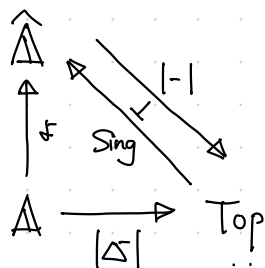
: standard n-simplex
: 標準的 n-単体

$$\circ |\Delta| : \Delta \rightarrow \text{Top}$$

$$[n] \mapsto |\Delta^n| := \left\{ \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}$$

: topological
: 位相的 n-単体

射もよしに



$$|-| := \text{Lan}_{\delta} |\Delta| : s\text{Set} \rightarrow \text{Top}$$

geometric realization

: 幾何学的実現

$\perp$: 普遍随伴

$$\text{Sing} := \text{Lan}_{|\Delta|} \delta : \text{Top} \rightarrow s\text{Set}$$

: 特異単体的集合
singular simplicial set

$$\text{余完備 counit } |\text{Sing } X| \rightarrow X \in \text{CW 近似と呼び}$$

$$=: \sqcup X \quad \text{これが "CW" 近似なのは非自明}$$

$$\hat{\Delta} \xrightarrow{C_*} \text{Kom}(\text{Ab})$$

: 特異鎖複体
singular chain complex

$$\xrightarrow{h^i} \text{Ab}$$

: 特異ホモロジー
singular homology

胞体鎖複体
cellular chain complex

(Thm. 1)

② 定義の unfold と (幾何的) 構成

★ Δ Δ の射は次の 2 種類で生成される.

$$\begin{array}{ccc}
 [n] = \{0 < \dots < i < \dots < n\} & [n+1] = \{0 < \dots < i < i+1 < \dots < n+1\} \\
 \delta_i \uparrow & \swarrow \quad \searrow \quad \nearrow & \sigma_i \downarrow \\
 [n-1] = \{0 < \dots < n-1\} & [n] = \{0 < \dots < i < \dots < n\}
 \end{array}$$

★ $K \in \mathbf{sSet}$ (i.e. $K: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$)

$$(\Delta) \xrightarrow{\text{op}} (\mathbf{Set})$$

$K: \mathbf{sSet}$ とは 以下の

$$\begin{array}{ccc}
 [n+1] & & K_{n+1} \\
 \sigma_i \downarrow & & \uparrow s_i \\
 [n] & \mapsto & K_n \\
 \delta_i \uparrow & & \downarrow d_i \\
 [n-1] & & K_{n-1}
 \end{array}$$

simplex
 $\circ \{K_n: \text{集合}\}_{n \in \mathbb{Z}}$: n -単体の集合
 $\circ \{s_i: K_n \rightarrow K_{n+1}\}$: 退化作用素
 $\circ \{d_i: K_n \rightarrow K_{n-1}\}$: 面作用素

であって、 (s_i, d_i) の自然な関係) を満たすもの.

$$K = \text{Sing } X = \text{Hom}_{\Delta}(\text{よ}, \text{Sing } X) \stackrel{\text{adj.}}{=} \text{Hom}_{\text{Top}}(|\Delta|, X)$$

$$(\text{Sing } X)_n = \text{Hom}_{\text{Top}}(|\Delta^n|, X)$$

$$\begin{array}{ccc}
 [3] \mapsto \text{Hom}_{\text{Top}}(|\Delta^3|, X) & \ni & \left[|\Delta^3| \begin{array}{c} \text{tetrahedron} \end{array} \xrightarrow{s_1(f)} \bigcirc \times \right] \\
 \downarrow \sigma_1 \mapsto s_1 \uparrow & & \downarrow \sigma_1 \quad \uparrow s_1 \\
 [2] \mapsto \text{Hom}_{\text{Top}}(|\Delta^2|, X) & \ni & \left[|\Delta^2| \begin{array}{c} \text{triangle} \end{array} \xrightarrow{f} \bigcirc \times \right] \\
 \downarrow \delta_1 \mapsto d_1 \downarrow & & \downarrow \delta_1 \quad \uparrow d_1 \\
 [1] \mapsto \text{Hom}_{\text{Top}}(|\Delta^1|, X) & \ni & \left[|\Delta^1| \begin{array}{c} \text{edge} \end{array} \xrightarrow{d_1(f)} \bigcirc \times \right]
 \end{array}$$

③ 証明すべきこと

Thm. 1 $|K|$ は CW 複体である.

(<https://kerodon.net/tag/001X>)

prf. simplicial set の一般論と 2 次の pushout がある.

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma \in S_n^{nd}} \partial \Delta^n & \xrightarrow{\quad} & \coprod_{\sigma \in S_n^{nd}} \Delta^n \\ \downarrow & \text{p.o.} & \downarrow \\ sk_{n-1}K & \xrightarrow{\quad} & sk_n K \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} K_n^{nd} \subseteq K_n : \text{non-degen. な } n\text{-単体} \\ sk_n K \subseteq K : n\text{以下単体とその} \\ \quad \quad \quad \text{degen. 全体} \\ \partial \Delta^n := sk_{n-1} \Delta^n \end{array} \right)$$

colim と $|\cdot|$ の交換から $|K| = \text{colim}_n |sk_n K|$ は CW 複体. $\square$

Rmk. $|K|$ の cell structure は, prf. 5')

$$\dots \hookrightarrow |sk_{n-1} K| \hookrightarrow |sk_n K| \hookrightarrow \dots$$

K_n^{nd} の各元 f は n -cell $S^n \cong |\Delta^n| \xrightarrow{|f|} |K|$ を与える.

②

$$\star C_*(K) = C_*^{\text{cell}}(|K|) \stackrel{\text{Rmk.}}{=} [\dots \rightarrow \mathbb{Z}^{\oplus K_n^{nd}} \xrightarrow{d} \mathbb{Z}^{\oplus K_{n-1}^{nd}} \rightarrow \dots]$$

微分: $f \in K_n^{nd}$ に対し, $d_i f \in K_{n-1}^{nd}$ の係数は

$$\text{deg} \left\{ \begin{array}{ccccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\quad} & |sk_{n-1} K| / |sk_{n-2} K| & \xrightarrow{\quad} & S^{n-1} \\ \downarrow & \nearrow |f| & \downarrow & \searrow \pi_i & \downarrow \\ |\partial \Delta^n| & \xrightarrow{\quad \sim \delta_i \quad} & |\Delta^{n-1}| / |\partial \Delta^{n-1}| & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{triangle} & & \text{circle} & & \text{circle} \end{array} \right.$$

$$= (-1)^i.$$

$$C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$$

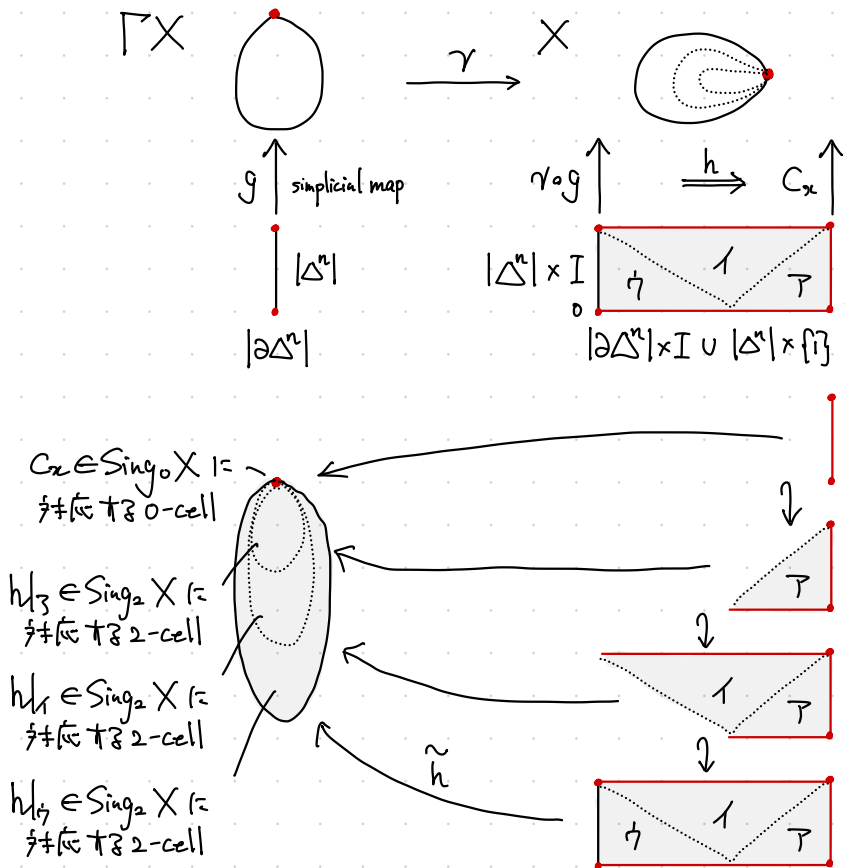
i.e.

$$d^{\text{sing}} = \sum (-1)^i d_i : \mathbb{Z}^{\oplus K_n^{nd}} \rightarrow \mathbb{Z}^{\oplus K_{n-1}^{nd}}$$

③

Thm. 2 $\Gamma X \xrightarrow{\gamma} X$ is weak equiv. τ exists.

prf. surj. is obvious.

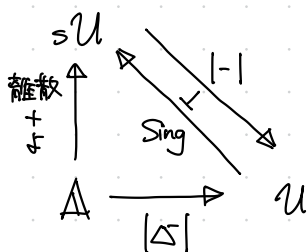


□.

①

$\mathcal{U}$ is a CGWH space.

simplicial space
: simplicial space of the space,



③

Thm. 2 $|-|$ は積を保存する. (<https://ncatlab.org/nlab/show/geometric+realization>)

prf. $|X \times Y|$

$$\begin{aligned} &\cong \left| \int^m X_m \cdot \Delta^m \times \int^n Y_n \cdot \Delta^n \right| && \coprod_{0 \in X_n} \Delta^n \\ &\cong \left| \int^m \int^n X_m \cdot Y_n \cdot (\Delta^m \times \Delta^n) \right| && \downarrow \text{余米田} \\ &\cong \int^m \int^n X_m \cdot Y_n \cdot |(\Delta^m \times \Delta^n)| && \downarrow \text{coend の colim 保存} \\ &\cong \int^m \int^n X_m \cdot Y_n \cdot |\Delta^m| \times |\Delta^n| && \downarrow || \text{ の colim (coend) 保存} \\ &\cong \int^m \int^n X_m \cdot |\Delta^m| \times Y_n \cdot |\Delta^n| && \downarrow \text{標準的単体に対する} \\ &\cong \int^m X_m \cdot |\Delta^m| \times \int^n Y_n \cdot |\Delta^n| && \downarrow || \text{ と 積 の 交換} \\ &\cong |X| \times |Y| && \downarrow \text{coend の colim 保存} \\ & && \downarrow || \text{ の colim (coend) 保存} \\ & && \downarrow \text{余米田} \end{aligned}$$

□

Cor. $C_*(K \times L) \xrightarrow{\sim} C_*(K) \otimes C_*(L)$

□

prf.

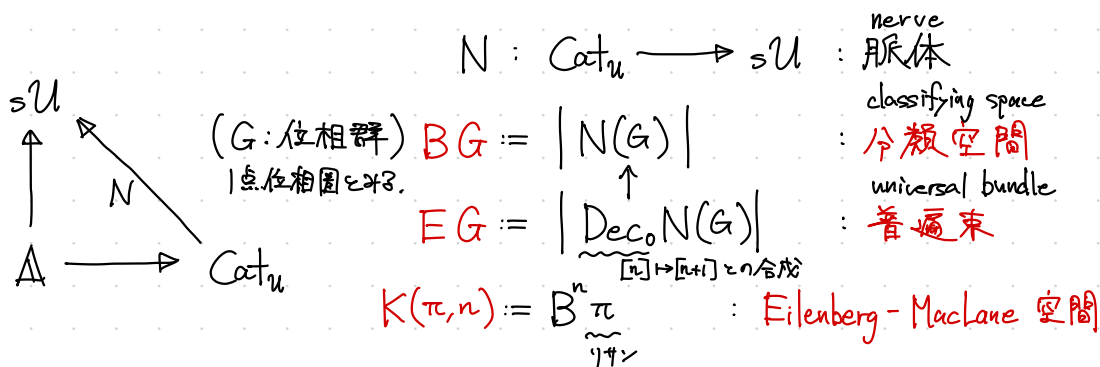
$$\begin{aligned} |K \times L| &\xrightarrow[\text{homeo}]{\sim} |K| \times |L| && (\pm \text{Thm}) \\ |K \times L| &\xrightarrow[\text{htpy equiv.}]{\text{cellular}} |K| \times |L| && \downarrow \text{cellular approx.} \\ C_*^{\text{cell}}(|K \times L|) &\xrightarrow[\text{chain htpy equiv.}]{\sim} C_*^{\text{cell}}(|K| \times |L|) && \\ & && C_*^{\text{cell}}(|K|) \otimes C_*^{\text{cell}}(|L|) && \text{(Eilenberg-Zilber)} \\ & && \downarrow \text{by def.} \\ C_*(K \times L) &\xrightarrow[\text{chain htpy equiv.}]{\sim} C_*(K) \otimes C_*(L) && \square \end{aligned}$$

①

topological category

• Cat_u : CGWH-豊穠圏(位相圏)の圏

• $\Delta \longrightarrow \text{Cat}_u; [n] \mapsto \{0 < \dots < n\}$: 自然に位相圏とみなす.



②

• $N: \text{Cat}_u \longrightarrow sU = \text{Fun}(\Delta^{\text{op}}, U)$

$\mathcal{C} \longmapsto N(\mathcal{C}): \Delta^{\text{op}} \longrightarrow U$

$[n] \mapsto N_n(\mathcal{C}) = \text{Fun}([n], \mathcal{C})$ (labeled "位相圏とみなす")

$\{C_0 \rightarrow \dots \rightarrow C_n: \mathcal{C} \text{ の合成可能な射 } n \text{ 個}\}$

+ face は 隣接する射の合成
degen. は id_{C_i} の付加

• $N_n(G) = G^n$

• $\text{Dec}_0 N_n(G) = N_{n+1}(G) = G^{n+1}$ $N_n^{\text{nd}}(G)$ i.e. 成合に e が現れない.

• $BG = \bigcup_{n \geq 0} |sk_n N(G)|$ 差/は $(G^n - W) \times (|\Delta^n| - |\partial \Delta^n|)$

$EG = \bigcup_{n \geq 0} |sk_n \text{Dec}_+ N(G)|$ 差/は $(G^n - W) \times G \times (|\Delta^n| - |\partial \Delta^n|)$

$\uparrow \text{pr}$
 $\uparrow$
 G 作用

③ simplicial set の一般論 (<https://ncatlab.org/nlab/show/decalage>) として.

$\text{Deco } K \rightarrow K : \text{Kan fibration if } K : \text{Kan complex}$

$\downarrow : \text{weak htpy equiv.}$

$\text{const } K_0$

がある.

Thm. 3 EG は可縮. (直感的には、余剰な成令が cone となる)

prf. $K = N(G)$ とし、経路を使うと

$$EG = |\text{Dec } N(G)| \xrightarrow[\sim]{\text{htpy eq.}} |\text{const } N(G)_0| = |\Delta^0| = \{*\}.$$

□

(+仮定: G は well-pointed. (i.e. $\{e\} \hookrightarrow G : \text{cofibration}$)

Thm. 4 $EG \rightarrow BG$ は fiber bundle.

prf. $W \hookrightarrow G^n : \text{cofibration}$ になり、絶対リトラクト近傍がある.

骨格の次元に関する帰納法で原点の自明化が取れる. □

Thm. 5 $\pi_{q+1}(BG) = \pi_q(G)$

prf. $G \rightarrow EG \xrightarrow{\text{fib}} BG$ で $EG : \text{可縮}$.

□

(+仮定: π は可換)

Thm. 6 $B\pi$ は位相群

prf. $\pi \times \pi \rightarrow \pi$ が grp. hom. になり、

すなわち双方を位相圏と見たときの関手になるので、

$B\pi \times B\pi \xrightarrow{\sim} B(\pi \times \pi) \rightarrow B\pi$ で後が定義できる. □

Cor. $\pi_q K(\pi, n) = \delta_{qn} \pi$